FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Guía 4: *Fuerzas eléctricas y magnéticas sobre cargas en movimiento*

1. Compare las trayectorias de una masa puntual m que tiene una velocidad inicial $\boldsymbol{v_0}$ (varios órdenes de magnitud inferior a la velocidad de la luz) en un campo gravitatorio $\mathbf{G}$ (uniforme) con la de una carga puntual q que tiene la misma velocidad inicial $\boldsymbol{v_0}$ en un campo electrostático $\mathbf{E}$ (uniforme). Discuta distintas direcciones relativas entre el campo y la velocidad inicial que tiene la partícula.

Para encontrar la trayectoria de la partícula, tenemos que hallar la ecuación horaria de su posición en función del tiempo, es decir, la función $\boldsymbol{r}(t)$. Esto lo podemos hacer empleando la mecánica clásica newtoniana porque la velocidad de la partícula es muy pequeña comparada con la de la luz. En este marco, el campo gravitatorio es un campo vectorial $\mathbf{G}$ tal que la fuerza gravitatoria $\boldsymbol{F}_g$ que actúa sobre la partícula –que tiene una masa gravitatoria m_g– está dada por la expresión

$$\boldsymbol{F}_g = m_g\mathbf{G}. \quad (1)$$

Por otro lado, la fuerza electrostática sobre la carga puntual q es

$$\boldsymbol{F}_e = q\mathbf{E}. \quad (2)$$

Dado que los campos $\mathbf{G}$ y $\mathbf{E}$ son estáticos y uniformes, (1) y (2) representan el caso de una fuerza constante $\boldsymbol{F}$ actuando sobre una partícula que tiene una velocidad inicial $\boldsymbol{v}_0$.

La ecuación de movimiento (2^{da} ley de Newton) para la partícula es

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}, \quad (3)$$

donde $\boldsymbol{p}$ es la cantidad de movimiento de la partícula, y m_i es su masa inercial. Acá remarcamos que la partícula tiene una masa gravitoria m_g y una masa inercial m_i. Hasta el presente, las mediciones más cuidadosas arrojan que estas dos masas son iguales. Entonces tomamos directamente una única masa m.

Integrando (3), obtenemos la velocidad de la partícula en función del tiempo:

$$\int_{\boldsymbol{v}_0}^{\boldsymbol{v}} m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \int_0^t \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t$$

$$m(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0) = \boldsymbol{F}\,t$$

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \frac{\boldsymbol{F}}{m}t = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}\,t, \quad (4)$$

donde

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}/m \quad (5)$$

es la aceleración de la partícula, que en este problema es constante ya que la fuerza lo es. De (4) vemos que como la aceleración es constante, la velocidad $\boldsymbol{v}(t)$ es un vector en el plano formado por las direcciones de $\boldsymbol{v}_0$ y $\boldsymbol{a}$. El movimiento de la partícula, la trayectoria del movimiento, se desarrola en el plano formado por $\boldsymbol{v}_0$ y $\boldsymbol{a}$.

Para la partícula acelerando en el campo gravitatorio, de (5) y (1) vemos que la aceleración es el mismo campo:

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{G}. \quad (6)$$

En el caso del campo electrostático, de (5) y (2) obtenemos que la aceleración es

$$\boldsymbol{a} = \frac{q}{m}\mathbf{E}. \quad (7)$$

La posición en función del tiempo se obtiene de integrar (4):

$$\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^t \boldsymbol{v}(t)\, dt$$

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2. \quad (8)$$

Entonces, estamos ante un movimiento uniformemente variado (aceleración constante). De lo visto en mecánica de Física I, sabemos que es un movimiento parabólico en el plano formado por los vectores $\boldsymbol{v}_0$ y $\boldsymbol{a}$ (o $\mathbf{G}$ o $\mathbf{E}$, según (5) y (6)) si la velocidad inicial no es cero y tiene dirección diferente a la de la aceleración. La trayectoria es un arco de parábola, y el eje de esta parábola está alineado con la aceleración, o sea, con el campo. Igualmente, más adelante obtenemos la ecuación de la trayectoria para verificar que corresponda a un arco de parábola.

Podemos interpretar este movimiento como la superposición, a partir de la posición inicial $\boldsymbol{r}_0$, de dos movimientos rectilíneos en direcciones perpendiculares. Uno de ellos es un movimiento uniforme en la dirección de $\boldsymbol{v}_{0\perp}$: la componente de la velocidad inicial perpendicular a la aceleración. El otro movimiento es uniformemente variado, en la dirección de la aceleración constante $\boldsymbol{a}$, con velocidad inicial $\boldsymbol{v}_{0\parallel}$: la componente de la velocidad inicial paralela a la aceleración. Podemos expresar esta superposición de movimientos reescribiendo la (8) como

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + [v_{0\perp}t]_{\mathrm{MRU}}\, \boldsymbol{e}_\perp + \left[v_{0\parallel}t + \tfrac{1}{2}at^2\right]_{\mathrm{MRUV}} \boldsymbol{e}_\parallel, \quad (9)$$

donde tomamos los versores $\boldsymbol{e}_\perp$ y $\boldsymbol{e}_\parallel$ en las direcciones perpendicular y paralela a la aceleración, y entre los corchetes aparecen las componentes escalares de la velocidad inicial y la aceleración.

La figura 1 muestra la trayectoria parabólica que describe una partícula de masa m y con una velocidad inicial que forma un ángulo de entre 90 y 180° con el campo $\mathbf{G}$, o la misma partícula con carga q positiva moviéndose en un campo $\mathbf{E}$ de igual orientación que el anterior.

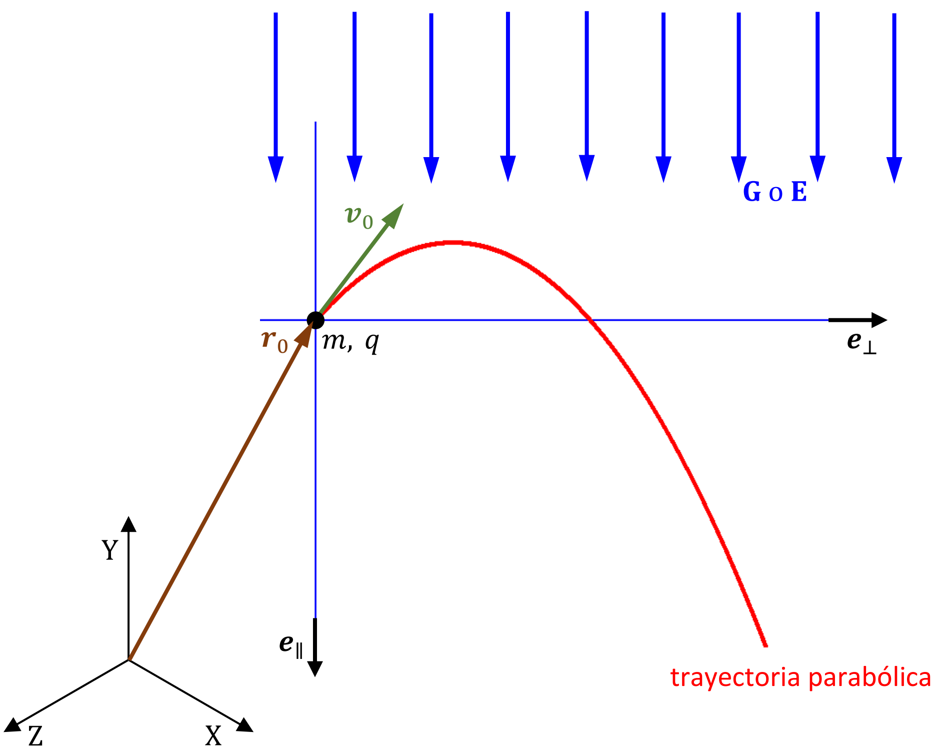

Figura 1

Observando la (9) y la (6), notamos que la trayectoria de la partícula en el campo gravitatorio depende sólo del campo y de las condiciones iniciales, pero no depende para nada de alguna propiedad de la partícula. No es así para el movimiento en el campo eléctrico. En este caso, de (9) y (7) vemos que la trayectoria también depende de la relación q/m. Para valores pequeños de q/m –predominio de la inercia sobre la "respuesta" eléctrica al campo–, la parábola es más abierta: la trayectoria se aparta más lentamente de la dirección de la velocidad inicial. En cambio, para valores grandes de q/m –predominio de la carga eléctrica–, la parábola es más cerrada y su curvatuva hace que pronto se aparte de la dirección inicial.

Entonces, tanto en el campo gravitario como en el campo eléctrico, la trayectoria está "regulada" por el campo, y además por el parámetro q/m en el caso del campo eléctrico.

Si queremos analizar más detalladamente la trayectoria, debemos obtener su ecuación. Sin perder generalidad podemos adaptar el esquema de la figura 1 y suponer que la posición inicial es cero, orientar el sistema de referencia tal que el campo esté alineado con un eje –por ejemplo, con sentido negativo según Y– y tomar la velocidad inicial en el plano XY. Con estas consideraciones, las ecuaciones horarias para las coordenadas x e y son

$$x(t) = v_{0x}t,$$

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}\,\mathrm{G}\,t^2 \text{ para el campo gravitorio,}$$

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}\frac{q}{m}\mathrm{E}\,t^2 \text{ para el campo eléctrico.}$$

Entonces, la ecuación de la trayectoria es

$$y(x) = -\frac{1}{\tan\theta}x - \frac{\mathrm{G}}{2v_0\,\mathrm{sen}^2\theta}x^2 \text{ para el campo gravitatorio,} \quad (10)$$

$$y(x) = -\frac{1}{\tan\theta}x - \frac{q}{m}\frac{\mathrm{E}}{2v_0\,\mathrm{sen}^2\theta}x^2 \text{ para el campo eléctrico.} \quad (11)$$

La figura 2 muestra la trayectoria que describe la partícula en el plano XY si su velocidad inicial $\boldsymbol{v}_0$ forma un ángulo θ con el campo $\mathbf{G}$ o $\mathbf{E}$.

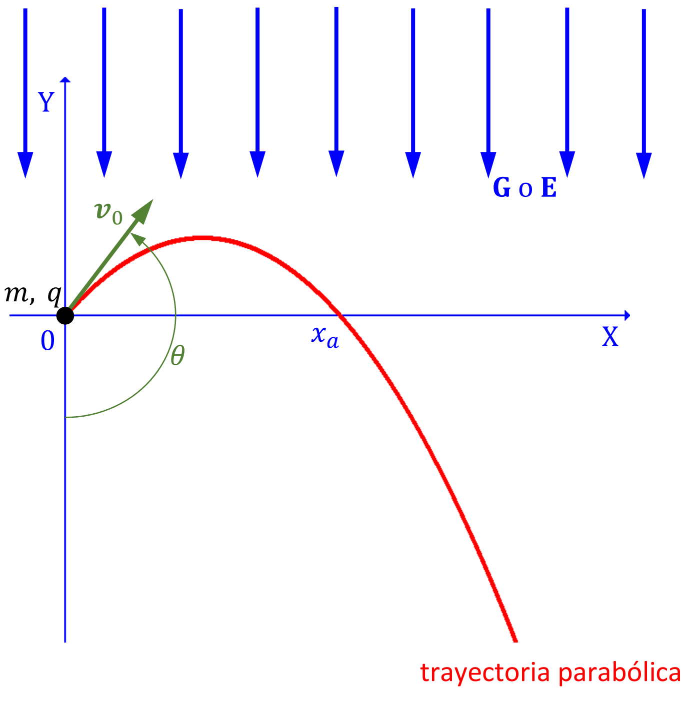

Figura 2

La posición x_a marcada en la figura 2 daría el "alcance" si estuviéramos hablando de un "tiro oblicuo". De (10) y (11) vemos que este alcance es

$$x_a = -\frac{2v_0\ \mathrm{sen}\theta\ \cos\theta}{\mathrm{G}} \text{ para el campo gravitarorio,}$$

$$x_a = -\frac{1}{\frac{q}{m}}\frac{2v_0\ \mathrm{sen}\theta\ \cos\theta}{E} \text{ para el campo eléctrico.}$$

Observamos que el alcance es mayor cuando el campo es "débil". Y en el caso del campo eléctrico, el alcance también es inversamente proporcional al parámetro q/m, en concordancia con lo que dijimos antes respecto de que la curvatura de la trayectoria está en relación directa con el valor de este parámetro.

Finalmente, digamos que cuando la velocidad inicial y la aceleración tienen la misma dirección ($\theta = 0$ o 180°), o si $\boldsymbol{v}_0 = 0$, estamos ante un movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV) en la dirección del campo. Como en un "tiro vertical" en el primer caso, o una "caída libre" en el segundo, si seguimos usando la analogía con el movimiento de proyectiles cerca de la superficie terrestre.